Séries de Dirichlet

30 octobre 2018

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres réels positifs strictement croissante de limite $+\infty$. Une série de fonctions de la forme $f = \sum a_n \exp(-\lambda_n z)$, où $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^*}$ et $z \in \mathbf{C}$ s'appelle une *série de Dirichlet*. Le cas classique correspond à $\lambda_n = \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire à la série $\sum \frac{a_n}{n^z}$.

Les questions notées (I) sont essentielles à la compréhension du cours.

Préliminaire (I). Soient a_n et b_n deux suites complexes, n et m deux entiers naturels tel que $n < m$; pour $k \geq n$ on note $A_k = \sum_{n+1\leq l\leq k} a_l$ avec la convention $A_n = 0$.
a) Vérifier que $\sum_{n<k\leq m} a_k b_k = \sum_{n<k\leq m}(b_k - b_{k+1})A_k + b_{m+1}A_m$.
b) On suppose que la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ est bornée, que la série $\sum |b_k - b_{k+1}|$ converge et que b_n tend vers 0. Montrer que la série $\sum a_n b_n$ converge.

1 Séries de Dirichlet de variable réelle

Etant donné une série de Dirichlet $f = \sum a_n \exp(-\lambda_n z)$, on note $\rho = \rho(f)$ la borne inférieure des nombres réels x tels que $\sum a_n \exp(-\lambda_n x)$ converge, et $\rho^+ = \rho^+(f)$ la borne inférieure des nombres réels x tels que $\sum a_n \exp(-\lambda_n x)$ converge absolument. On dit que ρ est *l'abscisse de convergence* de la série considérée, et ρ^+ son abscisse de convergence absolue.

1.1 (I)

a) Déterminer ρ et ρ^+ lorsque pour tout n, $\lambda_n = \ln n$ dans les cas suivants :
i) $\forall n \geq 1$, $a_n = 1$ ii) $\forall n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ iii) $\forall n \geq 2, a_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.
b) Montrer, dans le cas général, que $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ converge pour $x > \rho$.

1.2 (I)

a) Montrer que, dans le cas où pour tout n, $\lambda_n = \ln n$:
$\rho \leq \rho^+ \leq \rho + 1$ et donner des exemples pour chacune des trois situations .

b) On suppose que, pour tout entier $n \geq 1$, $\lambda_n = n$.
i) Soit $a \in \mathbf{R}$ tel que la suite $a_n e^{-na}$ soit bornée. que, pour tout nombre réel

$x > a$, la série $\sum a_n e^{-nx}$ converge.
ii) Montrer que $\rho = \rho^+$.
c) Déterminer ρ et ρ^+ lorsque $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\lambda_n = \ln(\ln n)$. pour $n \geq 2$.

1.3

On suppose $\rho < +\infty$. Soit f la somme de la série de Dirichlet étudiée.
a) (I) Soit $a > \rho^+$. Quelle est la nature de a convergence de $\sum a_n \exp(-\lambda_n x)$ sur $[a, +\infty[$? Même question si $a > \rho$. ?!.
b) (I) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) Montrer que, si f est nulle, la suite a_n est nulle.

On se place jusqu'à la fin de cette partie dans le cas où $n \geq 1$ et $\lambda_n = \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, ce qui donne

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall z \in \mathbf{C}, \exp(-\lambda_n z) = \frac{1}{n^z}.$$

Toutes les séries de Dirichlet ci-dessous sont supposées d'abscisse de convergence $< +\infty$.

1.4

a) (I) Montrer la dérivabilité de la somme f de $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^z}$ sur sa demi-droite ouverte $\Delta^+ =]\rho^+, +\infty[$ de convergence absolue. On pourra se donner des réels c et b tels que $\rho^+ < c < b$, travailler sur $[b, +\infty[$ et exploiter pour $x \geq b$ l'égalité $x = c + (b - c) + h$ avec $h \geq 0$.
b) Examiner la dérivabilité de f sur $]\rho, +\infty[$.

1.5

On conserve les notations de 4). Soient x un réel $> \rho^+$, des réels a et $T > 0$, mettre sous forme de série

$$F(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x + it) a^{x+it} dt$$

et en déduire que $F(T)$ tend vers a_n lorsque $a = n$ et vers 0 sinon lorsque T tend vers $+\infty$. (Calculez, paresseux !)

2 Séries de Dirichlet complexes

On note, ici et dans la suite, $\operatorname{Arg}(z)$ la détermination principale de l'argument de z sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$, on a donc $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$. Soit $f = \sum a_n \exp(-\lambda_n z)$ une série de Dirichlet.

2.1 Secteur angulaire de convergence (I)

Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ un nombre complexe. Montrer que si $x \neq 0$,

$$|\exp(-\lambda_n z) - \exp(-\lambda_{n+1} z)| \leq |\exp(-\lambda_n x) - \exp(-\lambda_{n+1} x)| \frac{|z|}{|x|}.$$

On pourra évaluer $\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zt} dt$.
b) Soit z_o tel que la série $\sum a_n \exp(-\lambda_n z_o)$ converge et soit $k \in]0, \pi/2[$. Montrer que la série $\sum a_n \exp(-\lambda_n z)$ converge uniformément dans le secteur

$$|\operatorname{Arg}(z - z_o)| \leq k.$$

On pourra se ramener au cas où $z_0 = 0$ en posant $z = z_0 + h$.
c) En déduire que, dans le demi-plan donné par $P(f) = \Re(z) > \rho$ la série $\sum a_n \exp(-\lambda_n z)$ converge et que sa somme y est continue. Que se passe-t-il si x réel vérifie $x < \rho$?

2.2

Le résultat démontré ici est destiné à la question suivante. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels ; q un entier ≥ 1. Montrer qu'il existe $p \in \{1, \ldots, q^n\}$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $d(px_i, \mathbf{Z}) < \frac{1}{q}$. On pourra appliquer le principe des tiroirs aux $q^n + 1$ vecteurs $(kx_i - E(kx_i))_{1 \leq i \leq n}$, $0 \leq k \leq q^n$.

2.3

Soit $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^z}$ une série de Dirichlet à coefficients positifs et d'abscisse de convergence 0, et soit f sa somme. On suppose que $\sum a_n$ diverge, et l'on se donne un réel $T > 0$.
a) Prouver que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. Cas particulier non utilisé dans la suite : Donner un équivalent en 0^+ de $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$. abel
Soient $M > 0$, $x > 0$ tel que $f(x) > M$, et $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\sum_{N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} < M/10$.
b) En utilisant convenablement 2.2 montrer qu'il existe $y \in \mathbf{R}$ tel que $y \geq T$ et $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\cos(y \ln p) \geq 1/2$.
c) Montrer que, pour tout $T > 0$, $f(z)$ n'est pas bornée dans l'ensemble

$$\Re(z) > 0, \Im(z) \geq T.$$

3 Fonctions arithmétiques et séries de Dirichlet (I)

Tous les entiers sont ici ≥ 1.
Préliminaire. Soient m et n deux entiers ≥ 1 premiers entre eux. Montrer que l'application $s : (d, d') \mapsto dd'$ est une bijection de l'ensemble de couples (d, d') formés d'un diviseur d de m et d'un diviseur d' de n , sur l'ensemble des diviseurs de mn.

On dit qu'une fonction $f : \mathbf{N}^* \mapsto \mathbf{C}$ est *multiplicative* lorsque, pour tout couple $(m, n) \in \mathbf{N}^{*2}$ d'entiers premiers entre eux, on a $f(mn) = f(m)f(n)$; et qu'elle est totalement multiplicative lorsque ceci a lieu sans restriction sur m et n. Les valeurs d'une fonction multiplicative f sont donc déterminées par la connaissance des $f(p^\alpha)$, $p \in \mathcal{P}$, $\alpha \in \mathbf{N}$; et celles d'une fonction totalement multiplicative f par les $f(p)$.

On rappelle que l'indicatrice d'Euler ϕ qui à un entier n associe le nombre d'entiers k compris entre 1 et n tels que k et n sont premiers entre eux est multiplicative et que, si p est premier et $r \in \mathbf{N}^*$, $\phi(p^r) = p^r - p^{r-1}$.

Dans ce qui suit, on note Λ l'ensemble des fonctions multiplicatives de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{C}$.

3.1

Montrer que les fonctions suivantes suivantes sont multiplicatives :

a) La fonction τ qui à $n \in \mathbf{N}^*$ associe le nombre de ses diviseurs.

b) La fonction μ (dite de Moebius) qui est nulle sur tous les entiers possédant un diviseur carré parfait non trivial, et vaut $(-1)^r$ sur les nombres de la forme $p_1 \cdots p_r$ où les p_i sont premiers et distincts.

3.2

Soient f et g deux éléments de Λ..

a) Montrer que l'application $f \star g : n \mapsto \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ est mutiplicative (user du préliminaire.)

b) En déduire que :

i) la fonction σ qui à un entier $n \geq 1$ associe la somme de ses diviseurs est multiplicative ;

ii) pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{d|n} \phi(d) = n$.

iii) Si f est une fonction multiplicative et $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ on a $f = g \star \mu$.

3.3

Soient $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^z}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n^z}$ deux séries de Dirichlet de sommes respectives f et g. Montrer que, pour tout z tel que $\Re(z) > \sup(\rho^+(f), \rho^+(g))$ on a $f(z)g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^z}$ où $c_n = \sum_{d\geq 1,\, d|n} a_d b_{n/d}$.

En déduire, à l'aide de la fonction de Moebius μ, l'inverse $1/\zeta(z)$ de $\zeta(z)$ pour z réel > 1 ainsi que, pour $z > 2$, l'expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{n^z}$ (ϕ désigne l'indicatrice d'Euler).

3.4

Soient x et y deux nombres réels > 1. Montrer successivement :

a) $\sum_{1\leq m\leq y} m = \frac{1}{2}y^2 + O(y)$ en $+\infty$;

b) $\sum_{1\leq d\leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(1/x)$;

c) $\sum_{1\leq n\leq x} \phi(d) = \sum_{1\leq n\leq x} \mu(d)(\sum_{1\leq m\leq x/d} m)$;

d) $\sum_{1\leq n\leq x}\phi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\ln x)$.
Déterminer alors la probabilité pour que deux entiers soient premiers entre eux.

I

$\lambda_n = \ln n$ donc $a_n e^{-\lambda_n x} = \dfrac{a_n}{n^x}$

i) $a_n = 1$ La série considérée est $\sum \dfrac{1}{n^x}$. Selon le critère de Riemann, elle converge ssi $x > 1$: $\rho = \rho^+ = 1$

ii) $a_n = (-1)^n$. Pour $x \leq 0$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ diverge grossièrement ; pour $x > 0$, le critère de Leibniz donne la convergence. Ainsi $\rho = 0$ et avec le critère de Riemann $\rho^+ = 1$.

iii) Ici $a_n = \mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

et $\dfrac{a_n}{n^x} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}+x}} - \dfrac{1}{2n^{1+x}} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2+x}}\right)$.

La série diverge pour $x \leq 0$ (distinguer $x \leq -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} < x \leq 0$) converge pour $x > 0$ donc $\rho = 0$; il y a convergence absolue exactement lorsque $x > \dfrac{1}{2}$ donc :

$$\rho = 0 \text{ et } \rho^+ = \frac{1}{2}.$$

b) Soit $x > \rho$. Par définition, il existe $x' \in \mathbb{R}$ tel que : $\rho < x' < x$ et $\sum a_n e^{-\lambda_n x'}$ converge. Écrivons :

$a_n e^{-\lambda_n x} = a_n e^{-\lambda_n x'} . \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n = e^{-\lambda_n (x - x')}$ décroît vers 0 :

le théorème d'Abel donne la convergence de $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$.

1.2. a). Soit $x > \rho + 1$; il vient : $x - 1 > \rho$ donc :

$\exists \varepsilon > 0$, $x - (1+\varepsilon) > \rho$; la suite $\dfrac{a_n}{n^{x-(1+\varepsilon)}}$ est donc bornée, donc $\dfrac{a_n}{n^x} = \dfrac{a_n}{n^{x-(1+\varepsilon)}} \times \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ est absolument convergente... Les séries examinées ci-dessus fournissent un exemple pour chacune des trois situations.

b) Lorsque $\lambda_n = n$, $a_n e^{-\lambda_n z} = a_n (e^{-z})^n$.

Prenons $z = x$ réel $> \rho$. Choisissons x_0 tel que :

$$\rho < x_0 < x.$$

il vient : $\sum a_n e^{-nx}$ converge

$$|a_n e^{-nx}| \leq (|a_n| e^{-n x_0}) e^{-n(x - x_0)}$$

avec $|a_n| e^{-n x_0}$ bornée et $\sum e^{-n(x-x_0)}$ convergente $(x - x_0) >$

donc $\sum |a_n| e^{-nx}$ converge. $(*)$

c) • On a donc : $a_n e^{-\lambda_n x} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-x (\ln(\ln n))}$. On fixe $x \in \mathbb{R}$.

Soit $u_n = |a_n e^{-\lambda_n x}|$, il vient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{x [\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)]}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + x \ln\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]\right\}$$

Or, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$

De là, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left\{-\frac{1}{2n} + \frac{1 \times x}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right\}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour n assez grand : avec le critère de Leibniz, la série converge $\Rightarrow$ $\rho = -\infty$.

•• Montrons que $\rho^+ = +\infty$: soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|a_n e^{-\lambda_n x}\right| = \frac{e^{-\ln(\ln n)x}}{\sqrt{n}}$$

Or : $\sqrt{n}\, e^{-\ln(\ln n)x} = e^{\frac{1}{2}\ln n - \ln(\ln n)x} \to +\infty$

donc $\left|a_n e^{-\lambda_n x}\right| \geq \frac{1}{n}$ pour n assez grand :

$\sum |a_n e^{-\lambda_n x}|$ diverge.

· Pour $x > a$, $|a_n e^{-\lambda_n x}| \leq |a_n| e^{-\lambda_n a}$ il y a CVN.

3) a) · La convergence de $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ est uniforme pour $x \geq \rho + 1$. On peut donc appliquer le théorème d'interversion des limites et obtenir :

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } \lambda_0 = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) $e^{\lambda_0 x} \cdot f(x)$ tend vers a_0 en $+\infty$, donc, si f est nulle, $a_0 = 0$.

On recommence avec $e^{\lambda_1 x} f(x)$, qui tend vers a_1 en $+\infty$: $a_1 = 0$ ETC.

4) a) Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [b, +\infty[$,

$$u_n(x) = \frac{a_n}{n^x} = a_n \frac{e^1}{n^{b-c+h}} \cdot \frac{1}{n^c}$$

$$= \left(\frac{a_n}{n^c}\right) \cdot \frac{1}{n^{b-c}} \cdot \frac{1}{n^h}$$

De là : $u_n'(x) = -\frac{\ln n}{n^{b-c}} \cdot \left(\frac{a_n}{n^c}\right) \cdot \frac{1}{n^h}$

$$|u_n'(x)| \leq \left|\frac{a_n}{n^c}\right| \left|\frac{\ln n}{n^{b-c}}\right|$$

Comme par hypothèse $\sum \left|\frac{a_n}{n^c}\right|$ converge, la série $\sum u_n'$ est normalement convergente sur $[b, +\infty[$.

Tout point de $]\rho^+, +\infty[$, étant intérieur à un tel intervalle, $\sum u_n$ est de classe C^1 sur $]\rho^+, +\infty[$

b) On reprend la même idée, en utilisant cette fois une transformation d'Abel : Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ ne dépendant que de c et b tel que $\frac{\ln n}{n^{b-c}}$ décroisse pour $n \geq N$.

Soit $\left| \begin{array}{l} \varepsilon > 0 \\ n_\varepsilon > N \end{array} \right.$ tel que : $\forall p \geq n_\varepsilon, \left| \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{a_n}{n^c} \right| \leq \varepsilon$

une transformation d'Abel avec reste positive :

$$\forall m > n \geq n_\varepsilon, \left| \sum_{n+1}^{m} a_p \frac{\ln n}{n^z} \right| \leq 2\varepsilon \frac{\ln(n+1)}{n^{b-c+h}}$$

Il y a donc convergence uniforme de la série dérivée terme à terme sur $[b, +\infty[$, donc f est C^1 sur $[b, +\infty[$ et, ceci étant vrai pour tout $b > \rho$, sur $]\rho, +\infty[$.

5) $$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(z+it)\, a^{z+it}\, dt = \frac{a^z}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z} \left(\frac{a}{n}\right)^{it} dt$$

$$= \frac{a^z}{2T} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z} \int_{-T}^{T} e^{it \log\left(\frac{a}{n}\right)} dt$$

l'interversion étant justifiée car :

$$\forall n \geq 1\ \forall t \in [-T, T], \left| \frac{a_n}{n^z} \left(\frac{a}{n}\right)^{it} \right| \leq \frac{|a_n|}{n^z}$$

terme général d'une série convergente puisque $z > \rho^+$

Or : $$\int_{-T}^{T} e^{it \log\left(\frac{a}{n}\right)} dt \underset{a \neq n}{=} \frac{2 \sin\left[T \log \frac{a}{n}\right]}{\log\left(\frac{a}{n}\right)}$$

donc pour $a \notin \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(z+it)\, a^{z+it}\, dt = \frac{a^z}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z} \frac{\sin\left[T \log \frac{a}{n}\right]}{\log \frac{a}{n}}$$

$\sum \left| \frac{a_n}{n^z} \right|$ converge, $\frac{\sin\left(T \log \frac{a}{n}\right)}{\log \frac{a}{n}}$ est borné, donc le membre de droite tend vers 0.

Si $a = n_0$, $\int_{-T}^{T} e^{it \log\left(\frac{n_0}{n_0}\right)} dt = 2T$ le même calcul réalisé en isolant n_0 donne pour limite a_{n_0}.

II

1°) a) d'une part $\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zt}\,dt = \frac{1}{z}\left(e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}\right)$, d'autre part

$$\left|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zt}\,dt\right| \leq \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} |e^{-zt}|\,dt = \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}\left(-e^{-\lambda_{n+1}x} + e^{-\lambda_n x}\right)$$

d'où le résultat.

b) Écrivons donc $z = z_0 + h = z_0 + re^{i\theta}$, avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. D'une part, $u = Re(h) = r\cos\theta > 0$, d'autre part $\frac{|h|}{u} \leq 1 + |tg\,\theta| \leq 1 + tg\,k$; d'où avec a) (*) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|e^{-\lambda_n h} - e^{-\lambda_{n+1} h}| \leq (1+tg\,k)\left[e^{-\lambda_n u} - e^{-\lambda_{n+1} u}\right]$

Effectuons maintenant une transformation d'Abel sur $\sum_n^m a_p e^{-\lambda_p(z_0+h)}$, $m > n \geq 1$, posons $A_p = \sum_{p+1}^{+\infty} a_q e^{-\lambda_q z_0}$ à l'avenir :

$$\sum_n^m a_p e^{-\lambda_p z_0} \cdot e^{-\lambda_p h} = \sum_n^m (A_p - A_{p-1}) e^{-\lambda_p h}$$
$$= \sum_n^m A_p e^{-\lambda_p h} - \sum_{n-1}^{m-1} A_p e^{-\lambda_{p+1} h}$$
$$= A_m e^{-\lambda_m h} - A_{n-1} e^{-\lambda_n h} + \sum_n^{m-1} A_p\left(e^{-\lambda_p h} - e^{-\lambda_{p+1} h}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de la série $\sum a_n e^{-\lambda_n z_0}$ nous donne $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall p \geq n_\varepsilon - 1$, $|A_p| \leq \varepsilon$, de là :

$$\forall m > n \geq n_\varepsilon,\ \left|\sum_n^m a_p e^{-\lambda_p z}\right| \leq \varepsilon\left(|e^{-\lambda_m h}| + |e^{-\lambda_n h}| + \sum_n^{m-1}\left|e^{-\lambda_p h} - e^{-\lambda_{p+1} h}\right|\right)$$
$$\underset{(*)}{\leq} \varepsilon(1+tg\,k)\cdot\left(2e^{-\lambda_{n-1} u}\right)$$

(la somme de droite se simplifie après majoration)

Bref : $\forall m > n \geq n_\varepsilon$, $\left|\sum_n^m a_p e^{-\lambda_p z}\right| \leq 2\varepsilon(1+tg\,k)$ dès que $\lambda_{n_\varepsilon} \geq 0$, ce que l'on peut supposer car $\lambda_n \to +\infty$.

Le critère de Cauchy est vérifié, comme $\mathbb{C}$ est complet ...

c) Convergence : Soit z tel que : $Re(z) > \rho$.
Par définition de ρ, il existe $z_0 \in C_1$ tel que :

$$\rho \leq Re(z_0) < Re(z) \text{ et } \sum a_n e^{-\lambda_n z} \text{ converge.}$$

Ecrivons : $z = z_0 + h = z_0 + u + iv$, on a : $u > 0$
et si $k \in [0, \frac{\pi}{2}[$ vérifie : $\frac{|v|}{u} \leq tg\, k$, 1-b)
donne la convergence de $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$.

Continuité : il suffit d'améliorer un peu la preuve ci-dessus pour y mettre de l'uniformité.
Avec les mêmes notations et k tel que : $\frac{|v|}{u} < tg\, k$ $\left(0 < k < \frac{\pi}{2}\right)$
on voit que z est intérieur à $S(z_0, k)$ et que, avec 1-b)

$$\forall\, m > n \geq n_\varepsilon \quad \left| \sum_n^m a_p e^{-\lambda_p z} \right| \leq 2(1 + tg\, k)\, \varepsilon.$$

$\sum a_p e^{-\lambda_p z}$ vérifie donc le critère de Cauchy uniforme et par suite converge uniformément au voisinage de z. $\square$

2) Découpons $[0,1[^n$ en q^n cubes de la forme

$$\left[\frac{\ell_1}{q}, \frac{\ell_1+1}{q}\right[\times \cdots \times \left[\frac{\ell_n}{q}, \frac{\ell_n+1}{q}\right[, \quad 0 \leq \ell_m \leq q-1.$$

Parmi les q^n+1 vecteurs $(kx_i - E(kx_i))_{1\leq i\leq n}$, $k \in [\![0, q^n]\!]$, deux au moins sont dans le même cube, mettons pour $k \neq k'$. Il vient alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |(k'-k)x_i - E(k'x_i) + E(kx_i)| < \frac{1}{q}$$

$p = k'-k$ convient.

3) a) Soit $M > 0$. Il existe par hypothèse $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^{N} a_k > M$. Comme $\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{k^x} \underset{0^+}{\to} \sum_{k=1}^{N} a_k$

il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]0,\alpha[$, $f(x) \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{k^x} \geq M$

Equivalent : Soit, pour $x > 0$, $\varphi_x(t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}$.

La fonction φ_x est décroissante, intégrable sur $]0,+\infty[$ ($\underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$) ; de là, correctement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}x}}{\sqrt{n}} \geq \int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt \geq f(x) - e^{-x}$$

Or : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt \underset{u=xt}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$ avec : $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$

Mais $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du \underset{u=v^2}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{\pi}$

$$f(x) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

b) La fonction $x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$ décroit. Soit ℓ sa limite à droite en 0^+ ($\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\ell \geq \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Or $\sum a_n$ diverge, $\ell = +\infty$.

Il existe donc x tel que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} > M$; d'où $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^x} > M$, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} < \frac{M}{100}$.

De là déjà : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x+iy}}\right| \leq \frac{M}{100}$.

D'après I-6°), il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(2\pi p T \ln n, 2\pi \mathbb{Z}) \leq \frac{\pi}{4}$$

(on applique I-6° à $(T\ln 1, \dots, T\ln N)$ pour $\varepsilon = \frac{1}{8}$, puis l'on multiplie par 2π).

De là : $\cos(2\pi p T \ln n) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ $p = 1, \dots, N$ et avec $y = 2\pi T$: $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{x+iy}}\right| \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^x} (\cos y \ln n) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} M$

et : $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x+iy}}\right| \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{100}\right) M \geq 42 \times \frac{M}{10}$ $\square$

III

Préliminaire. Si $d \mid m$ et $d' \mid n$, alors $dd' \mid mn$ par définition de la divisibilité (valable dans tout anneau commutatif).

Si $\delta \mid mn$, comme $m \wedge n = 1$, les facteurs premiers de δ se partagent en ceux qui divisent m, de produit d, et ceux qui divisent n, de produit d'. De là : $\delta = dd'$.

Enfin si $d_0 d'_0 = d_1 d'_1$, comme $d_0 \mid m$, $d'_1 \mid n$ et $m \wedge n = 1$ il vient $d_0 \wedge d'_1 = 1$. Le lemme de Gauss donne $d_0 \mid d_1$. De même $d_1 \mid d_0$ puis $d_1 = d_0$ et $d'_0 = d'_1$.

1) a) Résulte du préliminaire.

b) Vérification triviale. (0,025 pts --)

2) a) Avec les notations du préliminaire :

$$f * g(mn) = \sum_{\delta \mid mn} f(\delta)\, g\left(\frac{mn}{\delta}\right) = \sum_{\text{bijection}\left\{\begin{smallmatrix} d \mid m \\ d' \mid n \end{smallmatrix}\right.} \underbrace{f(dd')}_{= f(d) f(d')} g\left(\frac{m}{d}\right) g\left(\frac{n}{d'}\right)$$

$$= (f*g)(mn)$$

b) i) $\sigma(n) = (\mathrm{Id} * 1)(n)$

ii) $F(n) = \sum_{d \mid n} \phi(d)$ est multiplicative. Pour $n = p^r$, p premier :

$$F(p^r) = \sum_{d \mid p^r} \phi(d) = \phi(1) + \sum_{k=1}^{r} \phi(p^k)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{r} (p^k - p^{k-1}) = p^r$$

Donc, par multiplicativité, $F = \mathrm{Id}$.

iii) $g * \mu$ est multiplicative et si $n = p^2$, p premier :

$$g * \mu(p^2) = \sum_{d \mid p^2} \mu(d)\, g\!\left(\frac{n}{d}\right)$$
$$= \mu(1) g(n) - \mu(p) g\!\left(\frac{n}{p}\right)$$
$$= g(p^2) - g(p^{2-1}) = f(p^2).$$

2) Posons, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$: $u_{mn} = \frac{a_m}{m^z} \cdot \frac{b_n}{n^z}$.

Comme $\frac{|a_m|}{m^x}$ et $\frac{|b_n|}{n^x}$ ($x = \mathrm{Re}\, z$) sont par hypothèse convergentes, la famille u_{mn} est <u>sommable</u>. On peut donc écrire :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} u_{mn} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{pq=n} u_{pq} \right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{pq=n} \frac{a_p b_q}{p^x q^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^x}$$

où toutes les séries en jeu sont absolument convergentes.

Application : ii) Pour $\mathrm{Re}(z) > 2$, $\left| \frac{\phi(n)}{n^z} \right| \leq \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)-1}}$

donc $\sum \frac{\phi(n)}{n^z}$ est absolument convergente.

Il vient donc, avec $f = \phi$ et $g = \cancel{Id}$, $f * g = Id$ et

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{n^z} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^z} = \zeta(z-1)$$

i) Inverse de $\zeta(z)$:

Comme $\sum_{d \mid n} \mu(d) = 1$ pour $n = 1$ et 0 sinon, il vient

$$\zeta(z) \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}}_{|\,| \leq \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 * \mu(n)}{n^z} = 1 :$$

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$$

$\underline{\pi}$

3) a) $\sum_{1\leq n\leq y} n = \frac{1}{2}\left([y]([y]+1)\right) = \frac{1}{2}y^2 + O(y)$

b) $\sum_{1\leq d\leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + \sum_{x<d} \frac{\mu(d)}{d^2}$ où

$$\left|\sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| \leq \sum_{d>x} \frac{1}{d^2} \leq \int_{[x]}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

c) Avec ce qui précède :

$$\sum_{1\leq n\leq x} \phi(n) = \sum_{1\leq n\leq x} \left(\sum_{d\mid n} \mu(d)\left(\frac{n}{d}\right)\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Inversion de} \\ \sum_{d\mid n} \phi(d) = n \end{array}\right.$$

$$= \sum_{1\leq d\leq x} \mu(d) \sum_{1\leq m\leq \frac{x}{d}} m$$

$$= \sum_{1\leq d\leq x} \mu(d)\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{d^2} + O\left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

$$= \sum_{1\leq d\leq x} \frac{x^2\mu(d)}{2d^2} + x\,O\left(\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\right)$$

Or $\sum_{d\leq x} \frac{1}{d} = O(\log x)$, avec b) et le fait que $\sum_{1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$ il vient

$$\sum_{1\leq n\leq x} \phi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\ln x).$$

La probabilité cherchée est donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{1\leq k\leq n} \phi(k) = \frac{6}{\pi^2} \quad \square$$